25-02-2019
2η διάλεξη

Αλγεβρικές Καμπύλες
(Τοτάκης)

Ορισμός

Έστω R (ακέραια) περιοχή. Αυτή θα καλείται περιοχή μονοσήμαντης ανάλυσης (ΠΜΑ) αν

i) κάθε στοιχείο $a \neq 0_R \in R$ είναι αντιστρέψιμο είτε γράφεται ως γινόμενο ανάγωγων στοιχείων της περιοχής R (πεπερασμένο)

ii) $a = p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_\lambda \Rightarrow k = \lambda$ και υπάρχει αναδιάταξη έτσι ώστε κάθε p_i είναι ισοδύναμο με το q_i.

Παράδειγμα

$\mathbb{Z} \to 1, -1$ αντιστρέψιμα

$\searrow n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$

(ισοδύναμα)

$a \sim b$ αν $\exists\, \gamma$ αντιστρέψιμο : $a = b \cdot \gamma$

Θεώρημα

Αν ο R (δακτύλιος) είναι ΠΜΑ τότε και ο $R[x]$ είναι ΠΜΑ

Π.χ. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ είναι ΠΜΑ $\Rightarrow$ και $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$ είναι Π.Μ.Α.

Ιδιότητες (R ΠΜΑ)

1) $a \in R$ και $a \mid f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \Leftrightarrow a \mid a_i, \ \forall i = 1, \dots, n$

2) αν $a \in R$, a ανάγωγο με $a \mid b\gamma \Rightarrow a \mid b$ ή $a \mid \gamma$ $\quad (b \mid a \Leftrightarrow \exists \gamma : a = b\gamma)$

$a \mid b\gamma \Rightarrow \exists \delta \in R : a\delta = b\gamma$ αφού R ΠΜΑ $b = b_1 \dots b_{k_1}$,

$\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_{k_2}$ $\delta = \delta_1 \dots \delta_{k_3}$

$a \delta_1 \dots \delta_{k_3} = b_1 \dots b_{k_1} \gamma_1 \dots \gamma_{k_2} \xrightarrow[(ii)]{\text{ΠΜΑ}} \exists i : a \sim b_i$ ή $a \sim \gamma_i$

$a \sim b_i \Rightarrow \exists\, \varepsilon \in R : b_i = \varepsilon a \qquad a|b$

$\gamma_i = \varepsilon a \qquad a|\gamma$

α ανάγωγο $\in R$, $\phi_1, \phi_2 \in R[x]$

3) αν $a | \phi_1 \cdot \phi_2 \Rightarrow a|\phi_2$ ή $a|\phi_1$

$\phi_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ και έστω $a | \phi_1 \cdot \phi_2$

$\phi_2 = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ και $a \nmid \phi_1$ και $a \nmid \phi_2$

Θα καταλήξω σε άτοπο.

- $a \nmid \phi_1 \Rightarrow \exists\, i \in \{1, \dots, n\} : a \nmid a_i$ Επιλέγω το μικρότερο $i \in \{1, \dots, n\}$ έτσι ώστε $a \nmid a_i$ και $a | a_k$ για $k < i$ (1)

- $a \nmid \phi_2 \Rightarrow \exists\, j \in \{1, \dots, m\} : a \nmid b_j$ Επιλέγω το μικρότερο $j \in \{1, \dots, m\}$ τέτοιο ώστε $a \nmid b_j$ και $a | b_k$ για $k < j$ (2)

A_1 έχουμε ότι $a|A_1$ λόγω (1)

Κοιτάμε τον συντελεστή του x^{i+j}: $\underbrace{(a_0 b_{i+j} + a_1 b_{i+j-1} + \dots + a_{i-1}b_{j+1}) + a_i b_j + \underbrace{a_{i+1} b_{j-1} + \dots + a_{i+j} b_0}_{A_2}}_{A}$ (χωρίς $i<j$)

έχουμε ότι $a|A_2$ λόγω (2)

αφού $a | \phi_1 \phi_2 \Rightarrow a|A$ (ιδιότητα ①)

$a|A_1$

$a|A_2$

Επομένως, $a | a_i b_j \xrightarrow{a \text{ ανάγωγο}} a|a_i$ ή $a|b_j$ Άτοπο από (1), (2)

Γενικεύεται και σε πολυώνυμα: $f|\phi_1\phi_2$ και f ανάγωγο $\Rightarrow f|\phi_1$ ή $f|\phi_2$

$f, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}[x]$

Π.Χ.

ΟΧΙ ΜΠΑ $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$

$2 \cdot 3 = 6 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$

Αλγεβρικές Καμπύλες

Ορισμός

Μια επίπεδη αλγεβρική καμπύλη $V(f)$ ορίζεται ως το σύνολο των σημείων $\in K^2$ που μηδενίζουν κάποιο πολυώνυμο $f \in K[x,y]$ δηλαδή περιγράφεται ως $V(f) = \{(x,y) \in K^2 : f(x,y) = 0\}$

ποικιλότητα (variety)

παράδειγμα

1) $V(y-x) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x = 0\}$ ευθεία
2) $V(x^2+y^2-1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ κύκλος

Θεώρημα

Έστω $f \in \mathbb{R}[x,y]$ με $f = p_1(x,y) \cdots p_k(x,y)$ όπου $p_i(x,y)$ ανάγωγα

$\downarrow$

$\mathbb{C}[x,y]$

Τότε η $V(f) = V(p_1) \cup \dots \cup V(p_k)$

αυτά ονομάζονται ανάγωγες συνιστώσες της καμπύλης.

Απόδειξη

Θ.δ.ο. $V(f) \subseteq V(p_1) \cup \dots \cup V(p_k)$

Έστω $(x_0,y_0) \in V(f) \Leftrightarrow f(x_0,y_0) = 0 \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, k\} : p_i(x_0,y_0) = 0$

$\Leftrightarrow \exists i : (x_0,y_0) \in V(p_i) \Leftrightarrow x_0, y_0 \in V(p_1) \cup \dots \cup V(p_k)$

Παράδειγμα

Έστω $V(x-y,\ x^2-y^2-1)$ στο $\mathbb{R}^2$

(x_0,y_0) να μηδενίζουν και $x-y$ και x^2-y^2-1.

$$V(x-y)\cup V(x^2-y^2-1)$$

Ορισμός

Αν f ανάγωγο τότε και η καμπύλη $V(f)$ καλείται ανάγωγη.

Π.χ.

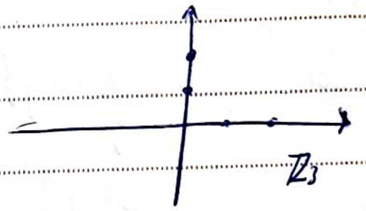
$V(x^2+y^2-1)\subseteq \mathbb{Z}_3^2$ $\qquad \mathbb{Z}_3=\{\bar{0}_3,\bar{1}_3,\bar{2}_3\}$

Θέλω $(\bar{x}_3,\bar{y}_3)\in V(f)$: $f(\bar{x}_3,\bar{y}_3)=\bar{0}_3$

$(\bar{1}_3,\bar{1}_3)$ παρατηρώ ότι $\bar{1}_3+\bar{1}_3-\bar{1}_3=\bar{1}_3\neq\bar{0}_3 \Rightarrow (\bar{1}_3,\bar{1}_3)\notin V(f)$

(και για τα 9 στοιχεία του $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$)

$(\bar{0}_3,\bar{2}_3)\in V(f)$ καθώς $\bar{0}_3^2+\bar{2}_3^2-\bar{1}_3^2=\bar{0}_3$



$V(f)=\{(\bar{0}_3,\bar{2}_3),(\bar{1}_3,\bar{0}_3),(\bar{0}_3,\bar{1}_3),(\bar{2}_3,\bar{0}_3)\}$

Σχεδιασμός (Αλγ. Καμπυλών) (Μέθοδος F. Klein)

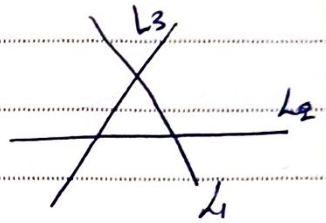
Έστω $L_1 = a_1x + b_1y + \gamma_1$ και έστω επιφάνεια

$L_2 = a_2x + b_2y + \gamma_2$ $\qquad z = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$

$L_3 = a_3x + b_3y + \gamma_3$

(οι ευθείες είναι διάφορες)

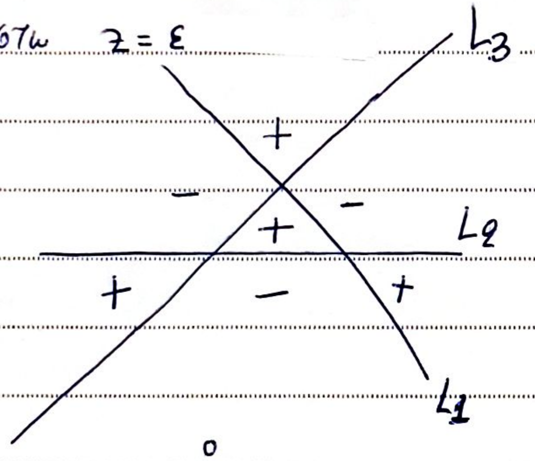
- για $z=0$ τότε η επιφάνεια z είναι της μορφής



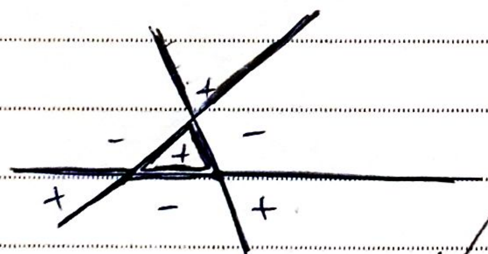
$V(L_1L_2L_3 - \varepsilon)$ $\quad L_1L_2L_3 - \varepsilon = 0 \Rightarrow L_1L_2L_3 = \varepsilon$

μόνο παίρνω τα (+)

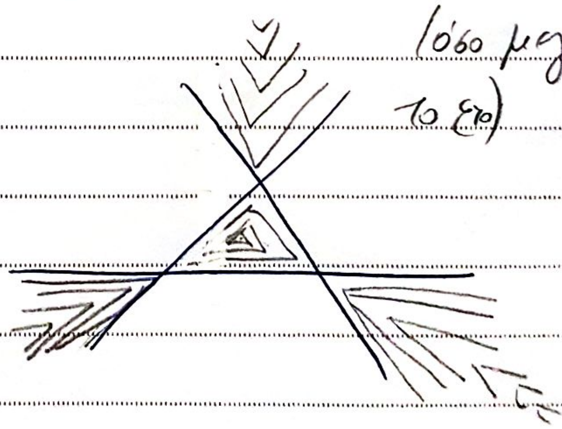
- Έστω $z = \varepsilon$



Έστω $z = \varepsilon \ll 0$



όσο μεγαλώνει το ε



Για $V(L_1L_2L_3+\varepsilon)$ θέλω τα (−) στο σχήμα.

γιατί $L_1L_2L_3 + \varepsilon = 0 \Rightarrow L_1L_2L_3 = -\varepsilon$

② Έστω $L_1 =$

$L_2 =$

$L_3 =$

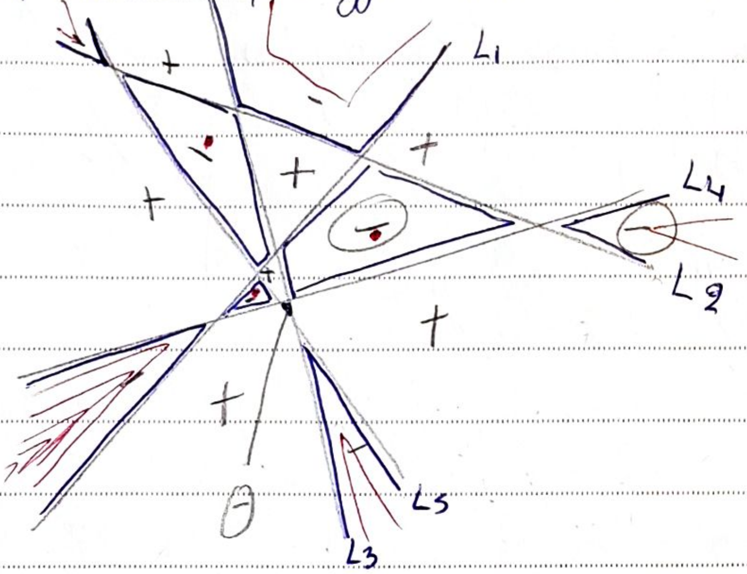
$L_4 =$

$L_5 =$

Να σχεδιαστεί προσεγγιστικά η $V(L_1L_2L_3L_4L_5 - \varepsilon)$ ($\varepsilon < 0$)

$L_1L_2L_3L_4L_5 - \varepsilon = 0$

$L_1L_2L_3L_4L_5 = \varepsilon$



Θα πάρω 2 περιπτώσεις

για ε πολύ μικρό και ε πολύ μεγάλο

↓ με το μπλε στυλό

απομακρύνονται τα ανοιχτά χωρία και τα κλειστά μένει μια κουκίδα (κόκκινο στ.λ.)

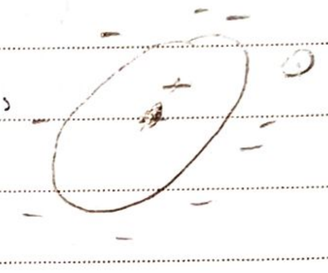
Σχεδιασμός Επιπέδων Καμπυλών όπου τουλάχιστον μια εκ των αναγώγων συνιστωσών είναι κωνική (π.χ. κύκλοι, έλλειψη, υπερβολή)

↓ ~~συμβολισμός κωνικών~~

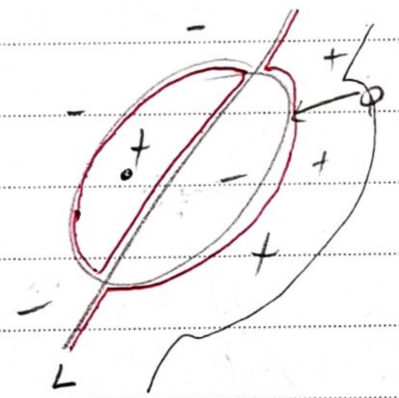
Q : $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y + a_6 = 0$ ανάγωγη κωνική.

L : $b_1x + b_2y + \gamma_3 = 0$ θα σχεδιάσουμε την $V(QL-\varepsilon)$, στο

η μορφή της κωνικής στην γενική μορφή είναι:



Άρα,



Θέλει $QL - \varepsilon = 0 \Rightarrow QL = \varepsilon$ Επομένως για ε πολύ μικρό κόκκινο στυλό και για ε πολύ μεγάλο μια κουκίδα στο κλειστό και στο ανοιχτό απομακρύνεται (μαύρο στυλό)